TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
FAKULTÄT FÜR INFORMATIK

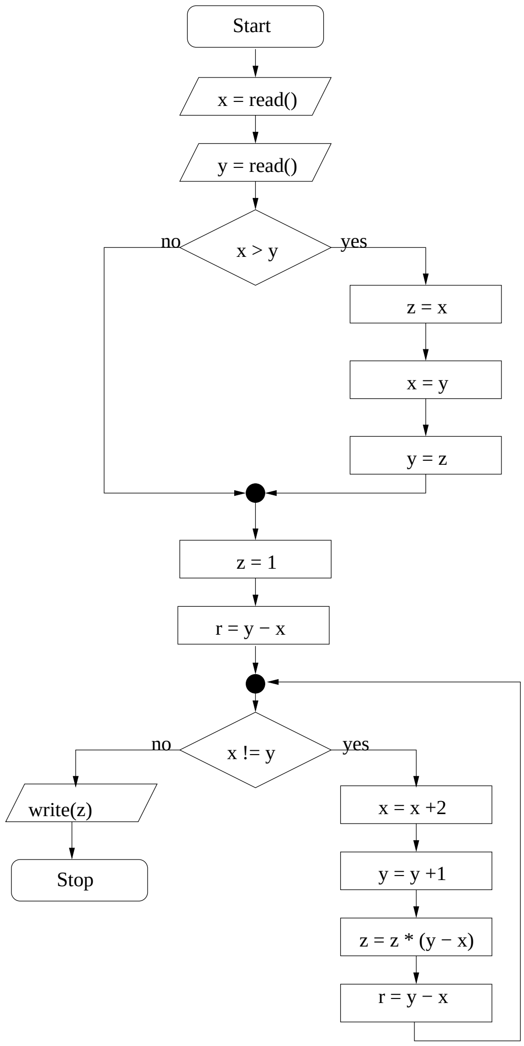
Lehrstuhl für Sprachen und Beschreibungsstrukturen
A. Berlea, F. Forster, T. Gawlitza

SoS 2007
Lösungsvorschläge zu Blatt 3
Ausgegeben am: 11. Mai 2007
Abgabe bis: **25. Mai 2007**

Übungen zu Einführung in die Informatik II

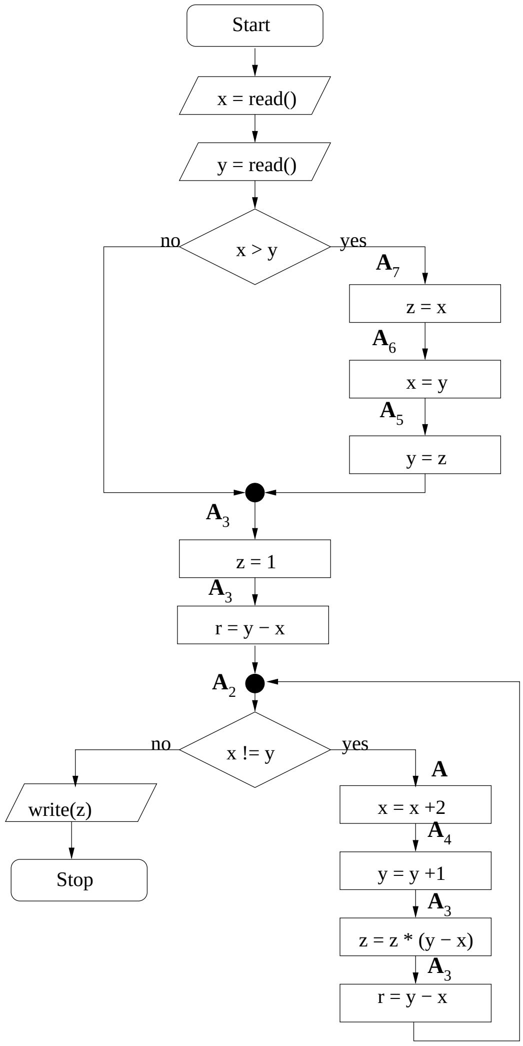
Aufgabe 1 Terminierung (Lösungsvorschlag)

a) Der Kontrollfluss-Graph sieht wie folgt aus:



b) Um die Terminierung zu beweisen, fügen wir die Hilfsvariable $r = y - x$ vor der Schleife und am Ende des Schleifenrumpfs ein. Das Programm terminiert, wenn die Schleife nur bei positiven Werten von r betreten wird, und r in jedem Schleifendurchlauf echt kleiner wird:

α) Wir überprüfen, dass beim Betreten der Schleife stets gilt, dass $r > 0$. Wir benutzen Zusicherungen wie unten dargestellt:



$A \equiv y > x \wedge r > 0$

$$\mathbf{WP}[\![\mathrm{x!} = \mathrm{y}]\!](\mathbf{true}, A) \equiv (x \neq y \wedge A) \vee (x = y \wedge \mathbf{true}) \tag{1}$$
$$\equiv x = y \vee A \equiv x = y \vee (y > x \wedge r > 0) \tag{2}$$
$$\equiv y \geq x \wedge (x = y \vee r > 0) \;\equiv:\; A_2 \tag{3}$$

$$\mathbf{WP}[\![\mathrm{r} = \mathrm{y} - \mathrm{x}]\!](A_2) \equiv y \geq x \wedge (x = y \vee y - x > 0) \tag{4}$$
$$\equiv y \geq x \;\equiv:\; A_3 \tag{5}$$

$$\mathbf{WP}[\![\mathrm{z} = \mathrm{z} * (\mathrm{y} - \mathrm{x})]\!](A_3) \equiv A_3 \tag{6}$$

$$\mathbf{WP}[\![\mathrm{y} = \mathrm{y} + 1]\!](A_3) \equiv y + 1 \geq x \;\equiv:\; A_4 \tag{7}$$

$$\mathbf{WP}[\![\mathrm{x} = \mathrm{x} + 2]\!](A_4) \equiv y + 1 \geq x + 2 \equiv y \geq x + 1 \equiv y > x \Leftarrow A \tag{8}$$

$$\mathbf{WP}[\![\mathrm{r} = \mathrm{y} - \mathrm{x}]\!](A_2) \equiv A_3 \tag{9}$$

$$\mathbf{WP}[\![\mathrm{z} = 1]\!](A_3) \equiv A_3 \tag{10}$$

$$\mathbf{WP}[\![\mathtt{y} = \mathtt{z}]\!](A_3) \equiv z \geq x \equiv: A_5 \quad (11)$$

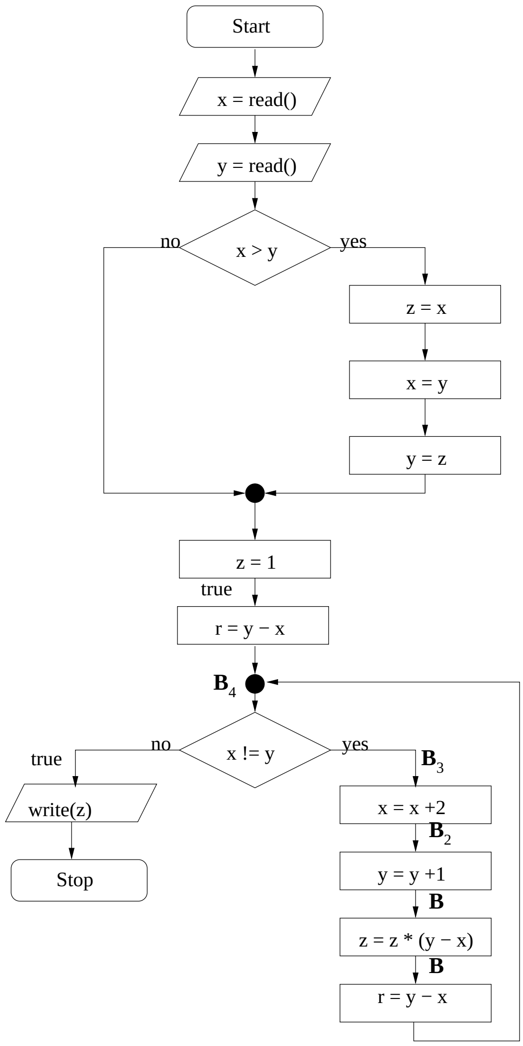
$$\mathbf{WP}[\![\mathtt{x} = \mathtt{y}]\!](A_5) \equiv z \geq y \equiv: A_6 \quad (12)$$

$$\mathbf{WP}[\![\mathtt{z} = \mathtt{x}]\!](A_6) \equiv x \geq y \equiv: A_7 \quad (13)$$

$$\mathbf{WP}[\![\mathtt{x} > \mathtt{y}]\!](A_3, A_7) \equiv (x \leq y \wedge A_3) \vee (x > y \wedge A_7) \equiv \quad (14)$$

$$\equiv x \leq y \vee x > y \equiv \mathbf{true} \quad (15)$$

β) Wir überprüfen wir, dass in der Schleife r in der Schleife immer dekrementiert wird. Wir benutzen Zusicherungen wie unten dargestellt:



$B \equiv r > y - x$

$$\mathbf{WP}[\![\mathtt{z} = \mathtt{z} * (\mathtt{y} - \mathtt{x});]\!](B) \equiv B \quad (16)$$

$$\mathbf{WP}[\![\mathtt{y} = \mathtt{y} + 1]\!](B) \equiv r > y + 1 - x \equiv B_2 \quad (17)$$

$$\mathbf{WP}[\![\mathtt{x} = \mathtt{x} + 2]\!](B_2) \equiv r > y + 1 - (x + 2) \equiv r > y - x - 1 \equiv B_3 \quad (18)$$

$$\mathbf{WP}[\![\mathtt{x}! = \mathtt{y}]\!](\mathbf{true}, B_3) \equiv (x = y \wedge \mathbf{true}) \vee (x \neq y \wedge B_3) \quad (19)$$

$$\equiv x = y \vee B_3 \equiv x = y \vee r > y - x - 1 \equiv: B_4 \quad (20)$$

$$\mathbf{WP}[\![\mathtt{r} = \mathtt{y} - \mathtt{x}]\!](B_4) \equiv x = y \vee 0 > -1 \equiv \mathbf{true} \Leftarrow B \quad (21)$$

Aufgabe 2 Adaptions-Regel (Lösungsvorschlag)

a) Richtig, da die Vorbedingung verstärkt worden ist.

b) Falsch! Gegenbeispiel:

```
void f() {
    if (n >= 0) n = 3*n + 6;
}
```

c) Richtig, da lediglich die logische Variable l durch den Term $l - 2$ (der nur logische Variablen enthält) ersetzt wurde.

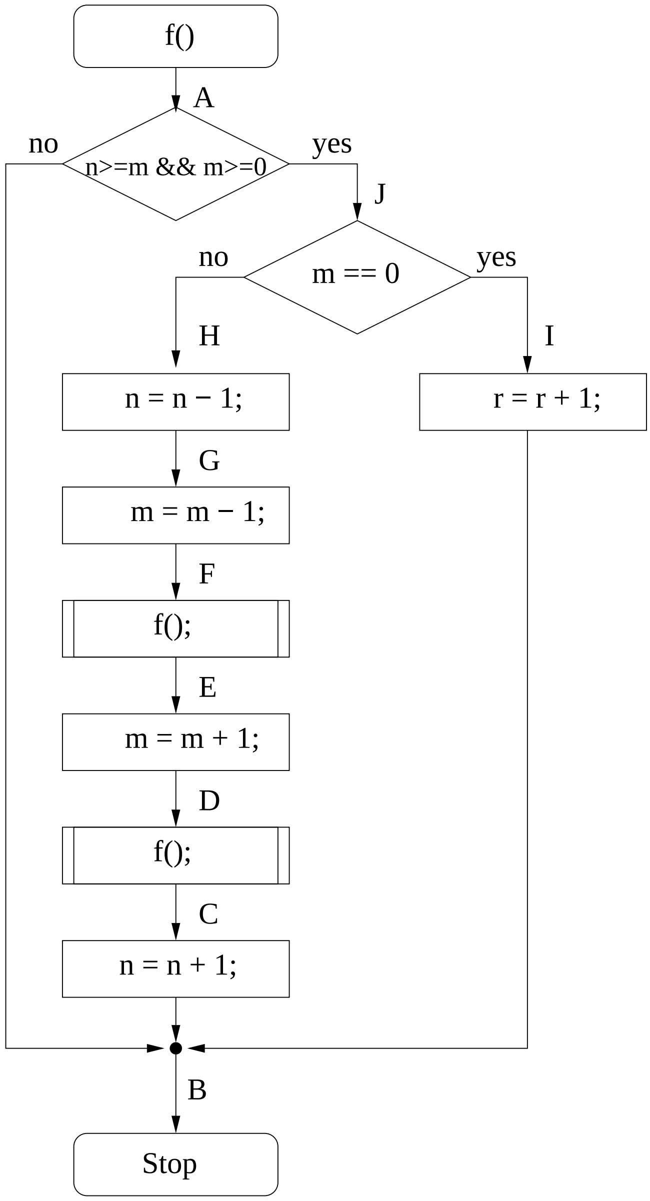
d) Falsch! Gegenbeispiel:

```
void f() {
    n = 3*n + 6;
    m = m + 1;
}
```

e) Richtig, laut Regel aus der Vorlesung!

Aufgabe 3 Rekursion (Lösungsvorschlag)

a) Der Kontrollfluß-Graph für die Prozedur `f()`:



b) **Verifikation der Prozedur `f()`.** Wir setzen

$$A \;:\equiv\; \mathtt{r} = l_{\mathtt{r}} \wedge \mathtt{m} = l_{\mathtt{m}} \wedge \mathtt{n} = l_{\mathtt{n}} \tag{22}$$

$$B \;:\equiv\; \mathtt{r} = l_{\mathtt{r}} + \binom{l_{\mathtt{n}}}{l_{\mathtt{m}}} \wedge \mathtt{m} = l_{\mathtt{m}} \wedge \mathtt{n} = l_{\mathtt{n}} \tag{23}$$

und setzen also die Gültigkeit des Trippels $\{A\}\ \mathtt{f}();\ \{B\}$ vorraus. Es ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\mathbf{WP}[\![\mathtt{n} = \mathtt{n}+1;]\!](B) \;&\equiv\; \mathtt{r} = l_{\mathtt{r}} + \binom{l_{\mathtt{n}}}{l_{\mathtt{m}}} \wedge \mathtt{m} = l_{\mathtt{m}} \wedge \mathtt{n}+1 = l_{\mathtt{n}} && (24)\\
&\Leftarrow\; \mathtt{r} = l_{\mathtt{r}} + \binom{l_{\mathtt{n}}}{l_{\mathtt{m}}} \wedge \mathtt{m} = l_{\mathtt{m}} \wedge \mathtt{n} = l_{\mathtt{n}} - 1 && (25)\\
&\qquad \wedge\, l_{\mathtt{n}} \geq l_{\mathtt{m}} \geq 1 && (26)\\
&\equiv\; \mathtt{r} = l_{\mathtt{r}} + \binom{l_{\mathtt{n}}-1}{l_{\mathtt{m}}-1} + \binom{l_{\mathtt{n}}-1}{l_{\mathtt{m}}} \wedge \mathtt{m} = l_{\mathtt{m}} \wedge \mathtt{n} = l_{\mathtt{n}} - 1 && (27)\\
&\qquad \wedge\, l_{\mathtt{n}} \geq l_{\mathtt{m}} \geq 1 && (28)\\
&\equiv:\; C && (29)
\end{aligned}$$

Wir setzen

$$D \;:\equiv\; \mathtt{r} = l_{\mathtt{r}} + \binom{l_{\mathtt{n}}-1}{l_{\mathtt{m}}-1} \wedge \mathtt{m} = l_{\mathtt{m}} \wedge \mathtt{n} = l_{\mathtt{n}} - 1 \wedge l_{\mathtt{n}} \geq l_{\mathtt{m}} \geq 1 \tag{30}$$

Die Gültigkeit des Trippels $\{D\}\ \mathtt{f}();\ \{C\}$ ergibt sich aus der Gültigkeit des Trippels $\{A\}\ \mathtt{f}();\ \{B\}$, da

$$D \equiv A[(l_{\mathtt{n}}-1)/l_{\mathtt{n}},\ (l_{\mathtt{r}} + \binom{l_{\mathtt{n}}-1}{l_{\mathtt{m}}-1})/l_{\mathtt{r}}] \wedge l_{\mathtt{n}} \geq l_{\mathtt{m}} \geq 1$$

und

$$C \equiv B[(l_{\mathtt{n}}-1)/l_{\mathtt{n}},\ (l_{\mathtt{r}} + \binom{l_{\mathtt{n}}-1}{l_{\mathtt{m}}-1})/l_{\mathtt{r}}] \wedge l_{\mathtt{n}} \geq l_{\mathtt{m}} \geq 1.$$

Das Trippel ergibt sich also durch Substitution logischer Variablen und Hinzufügen der Bedingung $l_{\mathtt{n}} \geq l_{\mathtt{m}} \geq 1$, die nur über logische Variablen spricht. (Spezialfall der Adaptions-Regel aus der Vorlesung.)

$$\begin{aligned}
\mathbf{WP}[\![\mathtt{m} = \mathtt{m}+1;]\!](D) \;&\equiv\; \mathtt{r} = l_{\mathtt{r}} + \binom{l_{\mathtt{n}}-1}{l_{\mathtt{m}}-1} \wedge \mathtt{m} = l_{\mathtt{m}} - 1 \wedge \mathtt{n} = l_{\mathtt{n}} - 1 && (31)\\
&\qquad \wedge\, l_{\mathtt{n}} \geq l_{\mathtt{m}} \geq 1 && (32)\\
&\equiv:\; E && (33)
\end{aligned}$$

Analog zum anderen Aufruf von $\mathtt{f}()$ setzen wir:

$$F \quad :\equiv \quad \mathtt{r} = l_{\mathtt{r}} \wedge \mathtt{m} = l_{\mathtt{m}} - 1 \wedge \mathtt{n} = l_{\mathtt{n}} - 1 \wedge l_{\mathtt{n}} \geq l_{\mathtt{m}} \geq 1 \tag{34}$$

Aus der Gültigkeit des Trippels $\{A\}$ $\mathtt{f}();$ $\{B\}$ ergibt sich wiederum die Gültigkeit des Trippels $\{F\}$ $\mathtt{f}();$ $\{E\}$.

$$\begin{aligned}
\mathbf{WP}[\![\mathtt{m} = \mathtt{m} - 1]\!](F) \quad &\equiv \quad \mathtt{r} = l_{\mathtt{r}} \wedge \mathtt{m} - 1 = l_{\mathtt{m}} - 1 \wedge \mathtt{n} = l_{\mathtt{n}} - 1 \wedge l_{\mathtt{n}} \geq l_{\mathtt{m}} \geq 1 && (35)\\
&\equiv \quad \mathtt{r} = l_{\mathtt{r}} \wedge \mathtt{m} = l_{\mathtt{m}} \wedge \mathtt{n} = l_{\mathtt{n}} - 1 \wedge l_{\mathtt{n}} \geq l_{\mathtt{m}} \geq 1 \;\equiv:\; G && (36)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{WP}[\![\mathtt{n} = \mathtt{n} - 1]\!](G) \quad &\equiv \quad \mathtt{r} = l_{\mathtt{r}} \wedge \mathtt{m} = l_{\mathtt{m}} \wedge \mathtt{n} - 1 = l_{\mathtt{n}} - 1 \wedge l_{\mathtt{n}} \geq l_{\mathtt{m}} \geq 1 && (37)\\
&\equiv \quad \mathtt{r} = l_{\mathtt{r}} \wedge \mathtt{m} = l_{\mathtt{m}} \wedge \mathtt{n} = l_{\mathtt{n}} \wedge l_{\mathtt{n}} \geq l_{\mathtt{m}} \geq 1 \;\equiv:\; H && (38)
\end{aligned}$$

$$\mathbf{WP}[\![\mathtt{r} = \mathtt{r} + 1]\!](B) \quad \equiv \quad \mathtt{r} + 1 = l_{\mathtt{r}} + \binom{l_{\mathtt{n}}}{l_{\mathtt{m}}} \wedge \mathtt{m} = l_{\mathtt{m}} \wedge \mathtt{n} = l_{\mathtt{n}} \;\equiv:\; I \tag{39}$$

Wir setzen

$$J :\equiv \mathtt{r} = l_{\mathtt{r}} \wedge \mathtt{m} = l_{\mathtt{m}} \wedge \mathtt{n} = l_{\mathtt{n}} \wedge l_{\mathtt{n}} \geq l_{\mathtt{m}} \geq 0$$

und zeigen, dass J die weakest pre-condition $\mathbf{WP}[\![\mathtt{m} == \mathtt{0}]\!](H,I) \equiv (\mathtt{m} \neq 0 \;\wedge\; H) \vee (\mathtt{m} = 0 \wedge I)$ impliziert. Dazu nehmen wir an, dass J gilt. Falls $\mathtt{m} \neq 0$ gilt offensichtlich H. Nehmen wir also an $\mathtt{m} = 0$. Dann ist $\binom{l_{\mathtt{n}}}{0} = 1$ and deshalb I erfüllt.

Schließlich bleibt zu überprüfen, ob A die weakest pre-condition

$$\mathbf{WP}[\![\mathtt{n} >= \mathtt{m} \,\&\&\, \mathtt{m} >= \mathtt{0}]\!](B,J) \equiv ((\mathtt{n} < \mathtt{m} \vee \mathtt{m} < 0) \;\wedge\; B) \vee (\mathtt{n} \geq \mathtt{m} \;\wedge\; \mathtt{m} \geq 0 \;\wedge\; J)$$

impliziert. Nehmen wir also an, dass A gilt. Gilt $n \geq m \;\wedge\; m \geq 0$ nicht, so gilt $n < m$ oder $m < 0$. In beiden Fällen ist $\binom{l_{\mathtt{n}}}{l_{\mathtt{m}}} = 0$, so dass B trivialerweise impliziert wird. Im Falle $n \geq m \;\wedge\; m \geq 0$ wird J trivialerweise impliziert.