TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
FAKULTÄT FÜR INFORMATIK

Lehrstuhl für Sprachen und Beschreibungsstrukturen
A. Berlea, F. Forster, T. Gawlitza

SoS 2007
Lösungsvorschläge zu Blatt 7
Ausgegeben am: 13. Juli 2007
Abgabe bis: -

Übungen zu Einführung in die Informatik II

Aufgabe 1 Terminierung

Da sich $\mathtt{l}$ zu einer Liste auswertet gilt: $\mathtt{l} \Rightarrow [\mathtt{v}_1, \ldots, \mathtt{v}_n]$. Weiterhin wissen wir, dass es Werte $\mathtt{v}'_1, \ldots, \mathtt{v}'_n$ gibt mit $\mathtt{g}\ \mathtt{v}_i \Rightarrow \mathtt{v}'_i$ für alle $i = 1, \ldots, n$. Wir zeigen die Behauptung per Induktion nach der Länge n der Liste $[\mathtt{v}_1, \ldots, \mathtt{v}_n]$. Zur Abkürzen schreiben wir

$$\begin{aligned}
e_1 &:\equiv \mathtt{match}\ \mathtt{l}\ \mathtt{with}\ [] \to []\ |\ \mathtt{x} :: \mathtt{xs} \to (\mathtt{f}\ \mathtt{x}) :: (\mathtt{map}\ \mathtt{f}\ \mathtt{xs}) \\
e_2 &:\equiv \mathtt{fun}\ \mathtt{l} \to e_1 \\
e_3 &:\equiv \mathtt{fun}\ \mathtt{f} \to e_2
\end{aligned}$$

und π für

$$\dfrac{\dfrac{\mathtt{map} = e_3 \quad e_3 \Rightarrow e_3}{\mathtt{map} \Rightarrow e_3} \quad \mathtt{g} \Rightarrow \mathtt{g} \quad e_2[\mathtt{g}/\mathtt{f}] \Rightarrow \mathtt{fun}\ \mathtt{l} \to \mathtt{match}\ \mathtt{l}\ \mathtt{with}\ [] \to []\ |\ \mathtt{x} :: \mathtt{xs} \to (\mathtt{g}\ \mathtt{x}) :: (\mathtt{map}\ \mathtt{g}\ \mathtt{xs})}{\mathtt{map}\ \mathtt{g} \Rightarrow \mathtt{fun}\ \mathtt{l} \to \mathtt{match}\ \mathtt{l}\ \mathtt{with}\ [] \to []\ |\ \mathtt{x} :: \mathtt{xs} \to (\mathtt{g}\ \mathtt{x}) :: (\mathtt{map}\ \mathtt{g}\ \mathtt{xs})}$$

Induktionsanfang: $n = 0$:

$$\dfrac{\pi \quad \mathtt{l} \Rightarrow [] \quad \dfrac{[] \Rightarrow [] \quad [] \Rightarrow []}{\mathtt{match}\ []\ \mathtt{with}\ [] \to []\ |\ \mathtt{x} :: \mathtt{xs} \to (\mathtt{g}\ \mathtt{x}) :: (\mathtt{map}\ \mathtt{g}\ \mathtt{xs}) \Rightarrow []}}{(\mathtt{map}\ \mathtt{g})\ \mathtt{l} \Rightarrow []}$$

Induktionsschluss: $n > 0$:

Nach Induktionsvoraussetzung gilt $\mathtt{map}\ \mathtt{g}\ [\mathtt{v}_2, \ldots, \mathtt{v}_n] \Rightarrow \mathtt{v}$ für einen geeigneten Wert $\mathtt{v}$. Damit gilt:

$$\dfrac{\pi \quad \mathtt{l} \Rightarrow [\mathtt{v}_1, \ldots, \mathtt{v}_n] \quad \dfrac{[\mathtt{v}_1, \ldots, \mathtt{v}_n] \Rightarrow [\mathtt{v}_1, \ldots, \mathtt{v}_n] \quad \dfrac{\mathtt{g}\ \mathtt{v}_1 \Rightarrow \mathtt{v}'_1 \quad (\mathtt{map}\ \mathtt{g}\ [\mathtt{v}_2, \ldots, \mathtt{v}_n]) \Rightarrow \mathtt{v}}{(\mathtt{g}\ \mathtt{v}_1) :: (\mathtt{map}\ \mathtt{g}\ [\mathtt{v}_2, \ldots, \mathtt{v}_n]) \Rightarrow \mathtt{v}'_1 :: \mathtt{v}}}{\mathtt{match}\ [\mathtt{v}_1, \ldots, \mathtt{v}_n]\ \mathtt{with}\ [] \to []\ |\ \mathtt{x} :: \mathtt{xs} \to (\mathtt{g}\ \mathtt{x}) :: (\mathtt{map}\ \mathtt{g}\ \mathtt{xs}) \Rightarrow \mathtt{v}'_1 :: \mathtt{v}}}{(\mathtt{map}\ \mathtt{g})\ \mathtt{l} \Rightarrow \mathtt{v}'_1 :: \mathtt{v}}$$

Aufgabe **Verifikation funktionaler Programme**

Zur Korrektheit unserer Induktionsbeweise benötigen wir, dass sämtliche vorkommenden Funktionsaufrufe terminieren. Im Folgenden setzen wir also Terminierung voraus. (siehe Vorlesung!)

a)
- $\texttt{xs}_0 = []$: Gemäß der angegebenen Definition gilt dann $\texttt{rev}\ \texttt{xs}_0 = []$. Somit folgt:

$$\begin{aligned}\texttt{rev}\ (\texttt{app}\ \texttt{xs}_0\ \texttt{ys}) &= \texttt{rev}\ (\texttt{app}\ []\ \texttt{ys})\\ &= \texttt{rev}\ \texttt{ys}\\ &= \texttt{app}\ (\texttt{rev}\ \texttt{ys})\ []\\ &= \texttt{app}\ (\texttt{rev}\ \texttt{ys})\ (\texttt{rev}\ \texttt{xs}_0) \quad \square\end{aligned}$$

  Bemerkung: Der Schritt von Zeile 2 nach Zeile 3 wurde in der Vorlesung bewiesen.

- **Induktionsschluss:** Wir betrachten die Liste $\texttt{xs}' = \texttt{x} :: \texttt{xs}$. Nach Induktionsannahme ist das zu beweisende Prädikat für Listen mit einer Länge $l < length(xs')$ gültig, d.h. die Aussage $\texttt{rev}\ (\texttt{app}\ \texttt{xs}\ \texttt{ys}) = \texttt{app}\ (\texttt{rev}\ \texttt{ys})\ (\texttt{rev}\ \texttt{xs})$ ist gültig. Wir bilden nun $\texttt{rev}(\texttt{app}\ \texttt{xs}'\ \texttt{ys})$. Dann gilt (unter Verwendung der bisher gezeigten Beziehungen):

$$\begin{aligned}\texttt{rev}\ (\texttt{app}\ \texttt{xs}'\ \texttt{ys}) &\overset{Def.\,\texttt{app}}{=} \texttt{rev}\ (\texttt{x} :: (\texttt{app}\ \texttt{xs}\ \texttt{ys}))\\ &\overset{Def.\,\texttt{rev}}{=} \texttt{app}\ (\texttt{rev}\ (\texttt{app}\ \texttt{xs}\ \texttt{ys}))\ [\texttt{x}]\\ &\overset{IA}{=} \texttt{app}\ (\texttt{app}\ (\texttt{rev}\ \texttt{ys})\ (\texttt{rev}\ \texttt{xs}))\ [\texttt{x}]\\ &\overset{Ass.}{=} \texttt{app}\ (\texttt{rev}\ \texttt{ys})\ (\texttt{app}\ (\texttt{rev}\ \texttt{xs})\ [\texttt{x}])\\ &\overset{IA}{=} \texttt{app}\ (\texttt{rev}\ \texttt{ys})\ (\texttt{rev}\ (\texttt{app}\ [\texttt{x}]\ \texttt{xs}))\\ &\overset{Def.}{=} \texttt{app}\ (\texttt{rev}\ \texttt{ys})\ (\texttt{rev}\ (\texttt{x} :: \texttt{xs}))\\ &= \texttt{app}\ (\texttt{rev}\ \texttt{ys})\ (\texttt{rev}\ \texttt{xs}') \quad \square\end{aligned}$$

  Bemerkung: Die Assoziativität von `app` wurde in der Vorlesung bewiesen.

b) Zu beweisen ist nun das Prädikat

$$\texttt{rev}\ (\texttt{rev}\ \texttt{xs}) = \texttt{xs}$$

Der Beweis erfolgt mittels Induktion:

Induktionsanfang: $\texttt{xs} = []$. Dann gilt gemäß Definition der Funktion `rev`:

$$\begin{aligned}\texttt{rev}\ (\texttt{rev}\ \texttt{xs}) &= \texttt{rev}\ (\texttt{rev}\ [])\\ &= \texttt{rev}\ []\\ &= [] \quad \square\end{aligned}$$

Induktionsschluss: Es wird gezeigt, dass aus der Gültigkeit von $\texttt{rev}\ (\texttt{rev}\ \texttt{xs}) = \texttt{xs}$ die Gültigkeit von $\texttt{rev}\ (\texttt{rev}\ (\texttt{x} :: \texttt{xs})) = \texttt{x} :: \texttt{xs}$ folgt:

$$\begin{aligned}\texttt{rev}\ (\texttt{rev}\ (\texttt{x} :: \texttt{xs})) &= \texttt{rev}\ (\texttt{app}\ (\texttt{rev}\ \texttt{xs})\ [\texttt{x}])\\ &\overset{a)}{=} \texttt{app}\ (\texttt{rev}\ [\texttt{x}])\ (\texttt{rev}\ (\texttt{rev}\ \texttt{xs}))\\ &\overset{IA}{=} \texttt{app}\ (\texttt{rev}\ [\texttt{x}])\ \texttt{xs}\\ &\overset{Def.\,\texttt{rev}}{=} \texttt{app}\ [\texttt{x}]\ \texttt{xs}\\ &= \texttt{x} :: \texttt{xs} \quad \square\end{aligned}$$